

直纹面齿轮共轲小齿轮的滚齿加工研究

彭先龙¹, 吴易凯¹, 胡锡文², 徐磊², 刘忠亮²

(1. 西安科技大学机械工程学院, 710054, 西安; 2. 中国核电工程有限公司, 100840, 北京)

摘要: 针对直纹面齿轮与圆柱齿轮不满足共轲关系而限制其在小传动比应用场合的情况, 提出与直纹面齿轮共轲的小齿轮及其滚齿加工方法。首先建立了直纹面齿轮及其共轲小齿轮的齿面方程, 获得共轲小齿轮相比圆柱齿轮的齿面偏差形貌; 随后推导了阿基米德齿轮滚刀的齿面方程, 并根据滚齿加工运动坐标系和啮合原理建立了圆柱齿轮的数学模型; 在滚齿加工圆柱齿轮的运动基础上, 通过增加滚刀的径向移动和工件的附加转动使滚刀切削刃逼近共轲齿面, 附加运动由泰勒多项式表示; 通过建立敏感矩阵方程并采用奇异值分解法迭代求解方程获得附加数控运动多项式系数, 最后获得数控加工齿面; 为评价直纹面齿轮副的传动性能, 进行了齿面承载接触分析, 并与传统面齿轮-圆柱齿轮副进行了对比。研究表明: 相同参数下, 直纹面齿轮副与传统面齿轮副的承载性能基本相同, 完全能够代替传统面齿轮副传动; 数值算例和仿真加工对该方法的验证表明, 其数值算例误差不超过 $1\ \mu\text{m}$, 仿真结果误差不超过 $6\ \mu\text{m}$, 证明了该方法的可行性和准确性。

关键词: 直纹面; 共轲小齿轮; 齿面偏差; 敏感矩阵; 滚齿加工; 齿面承载接触分析

中图分类号: TH132.4 **文献标志码:** A

DOI: 10.7652/xjtuxb202407015 **文章编号:** 0253-987X(2024)07-0160-10

Hobbing of Pinions Conjugate with Ruled Surface Face Gears

PENG Xianlong¹, WU Yikai¹, HU Xiwen², XU Lei², LIU Zhongliang²

(1. College of Mechanical Engineering, Xi'an University of Science and Technology, Xi'an 710054, China;

2. China Nuclear Power Engineering Co., Ltd, Beijing 100840, China)

Abstract: To address ruled surface face gears' limited application in small transmission ratios resulting from the lack of conjugacy with cylindrical gears, pinions conjugate with ruled surface face gears and outlines a corresponding hobbing method is proposed. Firstly, the equations of ruled surface face gears and the conjugate pinion are established, and the deviation morphology between a conjugate pinion and a cylindrical gear is obtained. Subsequently, the equation of Archimedes worm hob is derived, and a mathematical model of the cylindrical gear is developed according to the motion coordinate systems used in hobbing and meshing principles. Based on the motions of cylindrical gear hobbing, the hob's cutting edge approximates the conjugate surface through radial movement of the hob and additional rotation of the workpiece, expressed using Taylor polynomials. A sensitivity matrix equation is established, the singular value decomposition method is used to iteratively solve the equation to obtain the polynomial coefficients, and finally, the machining tooth surface is obtained. To evaluate the transmission

performance of ruled surface face gear pairs, load tooth contact analysis is conducted, with a comparison made with conventional face gear pairs and cylindrical gear pairs. The research results reveal that with the same parameters, the load performance of the ruled surface face gear pairs aligns closely with that of the conventional face gear pairs, which indicates the potential for the former to fully replace the latter. Finally, the method is validated through numerical examples and simulation processing, with a numerical example error of less than $1\text{ }\mu\text{m}$, and a simulation result error of less than $6\text{ }\mu\text{m}$. This underscores the feasibility and accuracy of this method.

Keywords: ruled surface; conjugate pinion; tooth surface deviation; sensitivity matrix; hobbing; load tooth contact analysis

面齿轮传动是锥齿轮传动的一种特殊形式,是依靠圆柱齿轮和面齿轮相啮合来传递两相交轴或交错轴之间的运动和动力的新型齿轮机构。由于其重合度高、结构紧凑、质量轻、轴向定位自由等特点,在航空航天、车辆、船舶等领域有广阔的应用前景^[1-2]。传统意义上,面齿轮齿面被看作是特殊的空间复杂曲面,无论是粗加工还是精加工,其过程多为点接触。图 1 所示为点接触的磨齿加工,这种加工限制了面齿轮的加工效率^[3-4],并且伴随着刀具和机床通用性差、加工成本高等缺点^[5-7]。Peng 等提出了面齿轮的直纹面,研究了面齿轮直纹面的理论展成过程以及直刃刀具的加工方法^[8-9],该方法不但使面齿轮的加工由点接触变成线接触,而且使刀具结构简化,修整更加容易,无需新的机床结构,降低了制造成本,使得面齿轮的批量化生产成为可能。Chu 等^[10]对面齿轮的直纹面进行了研究,提出了直纹面的侧铣加工方法,并通过试验证明了该加工方法的正确性。然而,上述文献均是针对面齿轮新齿形的研究,未考虑与面齿轮啮合的小齿轮。彭先龙等^[11]研究了直纹面面齿轮与直齿圆柱齿轮的承载接触性能,证明了该组合的可行性,但仅限于大传动比条件下的应用场合,如直升机减速箱等;在小传动比的应用场合中,如钓鱼卷线器、仪表机构^[12]等,由于新定义的直纹面相较传统面齿轮的齿形偏差较大^[11],无法满足与直齿圆柱齿轮的共轭关系,因此二者传动时对其啮合性能、传动精度和使用寿命产生诸多不

良影响。为了解决直纹面齿形偏差大带来的问题,本文提出了在小传动比条件下与直纹面面齿轮共轭的小齿轮及其加工方法,用直纹面面齿轮副替代传统面齿轮-圆柱齿轮副。

为了降低或消除齿面误差,通常在加工过程中对齿面误差进行修正补偿。宋碧芸等^[13]建立了螺旋锥齿轮加工误差控制模型并提出加工参数的修正方法,减小了齿面的加工误差。Wu 等^[14]采用含信赖域策略的 Levenberg-Marquard 算法和最小二乘法对准双曲面齿轮齿面误差进行修正,提高了双螺旋法切削准双曲面齿面的精度。Jiang 等^[15]提出一种六轴数控滚齿机模拟齿轮生成过程的通用数学模型,其运动轴都可由高阶多项式函数表示,通过调整多项式系数可逼近给定齿面。Shih 等^[16]直接用五轴数控机床对锥齿轮进行铣削加工,通过数控运动轴的高阶控制完成对齿面的高阶修正。蒋进科等^[17]提出了切向滚齿加工斜齿轮修形齿面的方法,该方法可减小安装误差敏感性,有效降低边缘接触现象,并通过对滚刀的修形及增加切向运动,消除传统加工的齿形扭曲。曹雪梅等^[18]根据高阶传动误差和齿面接触印痕的设计要求,对弧齿锥齿轮的共轭齿面进行了二次修正。聂少武等^[19]将弧齿锥齿轮的齿面修正量等效到小轮齿面上,反求出小轮的修正参数,提高了齿面修正效率。但目前尚未提出针对直纹面相较传统面齿轮的齿形偏差问题进行修正的方法,限制了其应用场合,故研究直纹面面齿轮齿形偏差的修正问题是非常必要的。为了保持直纹面面齿轮线接触加工的高效性并利用圆柱齿轮加工和修正的成熟性,通过啮合原理使直纹面的齿形偏差表现至与其共轭的小齿轮齿面,高效且有效地加工出共轭小齿轮是本文的研究重点。

本文对直纹面面齿轮的共轭小齿轮进行了滚齿加工方法与啮合性能的研究,推导了共轭小齿轮的齿面方程,研究了共轭小齿轮的滚齿加工运动规律

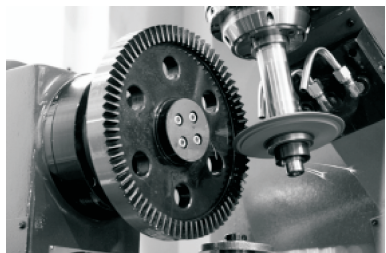


图 1 点接触的磨齿加工

Fig. 1 Gear grinding in point contact

及滚刀的齿面方程,通过齿面承载接触分析(LTCA)展现了直纹面面齿轮-共轭小齿轮副的啮合性能,并传统面齿轮-圆柱齿轮副进行了对比,最后通过数值算例和仿真加工验证了共轭小齿轮加工方法的正确性。

1 直纹面面齿轮副的齿形曲面

1.1 面齿轮的直纹面

直纹面面齿轮齿面可看作是空间变压力角变位直线簇,如图2所示,母线 s_i 沿着一条由齿顶到齿根的特殊接触线 L 运动,且在 L 上的任意一点都与圆柱齿轮齿面和直线 s_i 相切,直线形成的齿面即直纹面齿面。其详细推导过程以及线接触加工方法可见文献[8]。

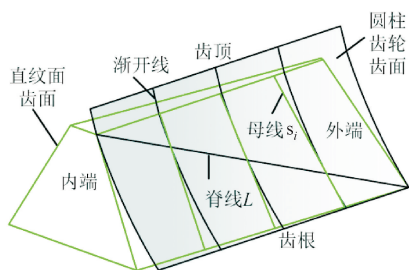


图2 正交直齿面齿轮的直纹面

Fig. 2 Ruled surface of orthogonal spur face gear

正交直齿面齿轮直纹面的位置矢量 $\mathbf{R}_2$ 可表示为

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} -r_{bc}(\sin\theta - \theta_c \cos\theta) + u \sin\theta - \frac{r_{bc}N_2}{N_c \cos\theta} \\ -r_{bc}(\cos\theta + \theta_c \sin\theta) + u \cos\theta \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中: $\theta = \theta_c + \theta_{0c}$, $\theta_{0c} = 0.5\pi/N_c - \tan\alpha + \alpha$, θ_c 是圆柱齿轮渐开线的展角, α 是压力角; r_{bc} 是基圆半径; N_c 、 N_2 分别是圆柱齿轮、面齿轮的齿数; u 表示母线 s_i 上任意点到接触线 L 的距离。面齿轮直纹面的法向矢量 $\mathbf{n}_2$ 可表示为

$$\mathbf{n}_2 = \frac{\frac{\partial \mathbf{R}_2}{\partial \theta_c} \times \frac{\partial \mathbf{R}_2}{\partial u}}{\left| \frac{\partial \mathbf{R}_2}{\partial \theta_c} \times \frac{\partial \mathbf{R}_2}{\partial u} \right|} = \begin{bmatrix} \frac{r_{bc}N_2 \sin\theta \cos\theta}{W^{1/2}} \\ \frac{uN_c \cos^2\theta}{W^{1/2}} \\ -\frac{r_{bc}N_2 \sin^2\theta}{W^{1/2}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中: $W = r_{bc}^2 N_2^2 \sin^2\theta + u^2 N_c^2 \cos^4\theta$ 。

由于直纹面面齿轮与传统面齿轮在传动比大于5时的齿面偏差几乎可以忽略^[10],因此无需考虑其偏差修正;而当传动比小于5时,两者的偏差过大,会影响与圆柱齿轮的啮合性能,需要考虑齿面的偏差修正。选择对圆柱齿轮进行齿面修正,既能保持直纹面线接触加工的高效性,又能避免面齿轮齿面修正耗时、刀具易磨损等问题。因此,本文提出小齿轮的修正齿面及其加工方法。

1.2 共轭小齿轮齿面展成

由直纹面的定义可知,直纹面齿面与圆柱齿轮齿面除了接触线相切外,齿面其他位置不再相切,尤其是齿根和齿顶处存在较大偏差,如图2所示。若直纹面齿面直接与圆柱齿轮进行啮合传动,必定因不满足共轭关系而产生强烈的振动冲击,加快齿轮的磨损。为了避免上述情况的发生,将直纹面齿面看作展成与直纹面小齿轮的刀具,展成与直纹面完全共轭的小齿轮齿面。小齿轮齿面的展成坐标系如图3所示。

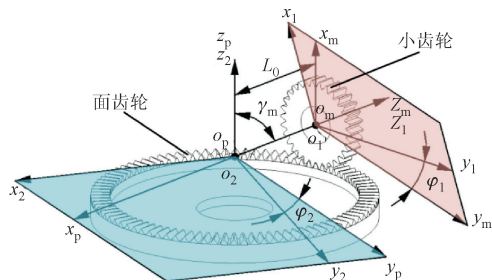


图3 小齿轮展成坐标系

Fig. 3 Generation coordinate system of the pinion

图3中,坐标系 $o_2x_2y_2z_2$ 、 $o_px_py_pz_p$ 分别是直纹面面齿轮的运动坐标系和固定坐标系;坐标系 $o_1x_1y_1z_1$ 、 $o_mx_my_mz_m$ 分别是小齿轮的运动坐标系和固定坐标系; γ_m 为面齿轮副的轴夹角; $L_0 = (L_1 + L_2)/2$, L_1 、 L_2 分别为面齿轮的内径和外径; φ_2 、 φ_1 分别是面齿轮和小齿轮的转角,满足传动比

$$\varphi_2/\varphi_1 = N_1/N_2 \quad (3)$$

式中: N_1 为小齿轮的齿数。

通过联立 S_2 到 S_1 的坐标变换方程以及两齿轮间的啮合方程,可以确定出共轭小齿轮齿面的位置矢量 $\mathbf{R}_1$ 和法向矢量 $\mathbf{n}_1$

$$\begin{cases} \mathbf{R}_1(\varphi_2, \theta_c, u) = \mathbf{M}_{12}(\varphi_2) \mathbf{R}_2(\theta_c, u) \\ \mathbf{n}_1(\varphi_2, \theta_c, u) = \mathbf{M}_{12}(\varphi_2) \mathbf{n}_2(\theta_c, u) \\ f_1(\varphi_2, \theta_c, u) = \mathbf{n}_1(\varphi_2, \theta_c, u) \cdot \frac{\partial \mathbf{R}_1(\varphi_2, \theta_c, u)}{\partial \varphi_2} \end{cases} \quad (4)$$

式中, $\mathbf{M}_{12}$ 是坐标变换矩阵。

1.3 齿面偏差分析

由于共轭齿面不是简单的规则曲面,而是随着齿宽不断变化的复杂曲面,因此共轭齿面与圆柱齿轮齿面存在差异。共轭齿面相对圆柱齿轮的齿面偏差如图 4 所示,齿面偏差 δ 由下式确定

$$\delta = n_c \cdot (R_1 - R_c) \tag{5}$$

式中: R_c 、 n_c 分别是标准圆柱齿轮的位矢和法矢。

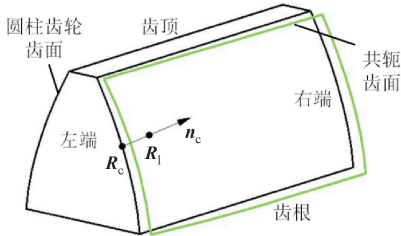


图 4 齿面偏差的定义

Fig. 4 Definition of tooth surface deviations

图 5 展示了在面齿轮参数为: $N_2=90, N_1=30$, 模数 $m=4\text{ mm}$, $\alpha=25^\circ$, $\gamma_m=90^\circ$, 内径 $L_1=170\text{ mm}$, 外径 $L_2=200\text{ mm}$ 的共轭小齿轮相比圆柱齿轮的齿面偏差,图中黑色齿面表示圆柱齿轮齿面,红色网格齿面表示共轭齿面。可见,相较于其他部分,齿顶和齿根的偏差最为明显,齿面偏差沿着齿宽方向由左向右逐渐增大,且最大偏差出现在齿根右端。

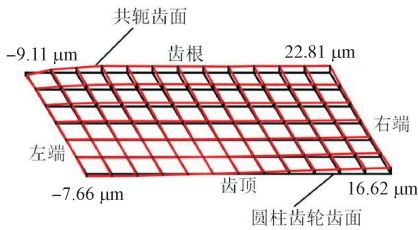


图 5 齿面偏差形貌

Fig. 5 Morphology of tooth surface deviations

根据直纹面与传统面齿轮的齿面偏差规律,已知传动比是影响齿面偏差的主要因素,因此需给出不同传动比下,共轭小齿轮与圆柱齿轮之间的齿面偏差。图 6 展示了模数为 4 mm 、传动比 i 为 $1\sim 12$ 时共轭小齿轮齿面的最大偏差 δ_2 。可以看出,当传动比 i 等于 6 时,齿面最大偏差接近于 0,且传动比 i 越大,最大偏差越小且不大于 $2.5\text{ }\mu\text{m}$ 。考虑到实际制造和安装误差,当传动比大于 5 时,共轭小齿轮齿面与标准圆柱齿轮的偏差几乎可以忽略不计;而传动比小于等于 5 时,小齿轮的偏差较大,影响齿轮副的啮合性能,需要考虑共轭齿面的加工。同时,图 6 也展示了相同参数下直纹面面齿轮相较传统面齿轮的最大偏差 δ_1 ,其计算方式与小齿轮相似,故不再

重复。从图中可得,虽然小传动比时直纹面偏差 δ_1 相较小齿轮偏差 δ_2 更大,但两者整体的偏差变化规律基本一致,证明了其正确性。

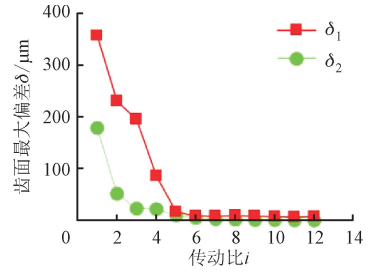


图 6 传动比与最大偏差

Fig. 6 Transmission ratios and maximum deviations

2 滚刀基本蜗杆的齿面方程

滚齿加工是目前应用最广的齿轮加工方法之一,除了能连续切削外,其加工接触方式为点接触,加工运动的自由度相对成形法更多,其中阿基米德齿轮滚刀在制造与测量方面相对简单,应用广泛^[20],因此无论加工圆柱齿轮的规则曲面还是共轭小齿轮的空间复杂曲面,皆可由其实现,滚齿加工原理如图 7 所示。

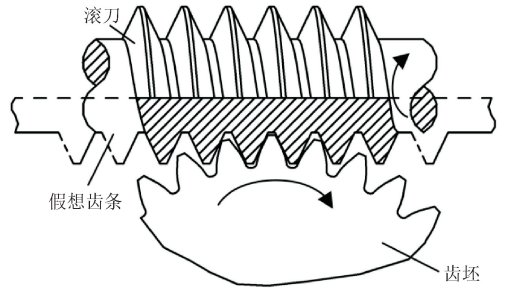


图 7 滚齿加工原理

Fig. 7 Principle of gear hobbing

在加工共轭齿面时,由于附加运动(加工方法见第 3 节)会导致齿面过切,因此滚刀需进行切向变位^[21]。滚刀的轴截面如图 8 所示,产形线 I 和 II 绕着轴线做螺旋运动,分别形成了滚刀左右两侧的螺旋面。由于产形线 I 和 II 关于 x 轴对称,二者的螺旋面表达相似,限于篇幅,仅给出右侧螺旋面的方程表达式

$$R_h = \begin{bmatrix} u_h \cos \alpha_h \cos \theta_h \\ u_h \cos \alpha_h \sin \theta_h \\ u_h \sin \alpha_h - (r \tan \alpha_h + s/2) + p \theta_h \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

式中: $p=m_h/2$; $s=m_h\pi/2-2x_hm_h$, m_h 为滚刀模数, x_h 为切向变位系数; u_h 为产形线上的任意一点的位

置; θ_h 为螺旋运动的回转角; α_h 为齿形角; r 为滚刀基本蜗杆的分度圆半径。

滚刀基本蜗杆的法矢 $\mathbf{n}_h$ 可由下式表示

$$\mathbf{n}_h = \begin{bmatrix} \cos \alpha_h (p \sin \theta_h - u_h \cos \theta_h \sin \alpha_h) \\ \cos \alpha_h (u_h \sin \alpha_h \sin \theta_h + p \cos \theta_h) \\ u_h \cos^2 \alpha_h \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

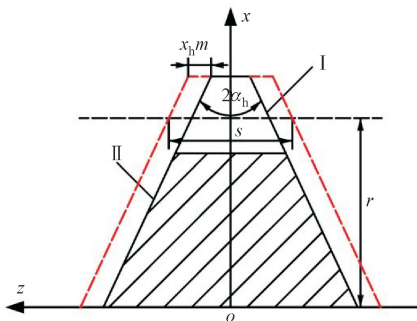


图8 滚刀轴截面的几何形状

Fig. 8 Geometric shape of the hob shaft section

3 共轭小齿轮的加工方法

3.1 圆柱齿轮齿面展成

根据共轭小齿轮与圆柱齿轮的齿面偏差规律可知,共轭小齿轮齿面可看作是基于圆柱齿轮的修正齿面。为了便于加工共轭齿面,首先给出圆柱齿轮的滚齿加工过程。阿基米德滚刀展成圆柱齿轮是双参数展成过程,除了滚刀的切削运动和工件的分齿运动外,还有滚刀在齿宽方向的进给运动,滚齿加工运动坐标系如图9所示。

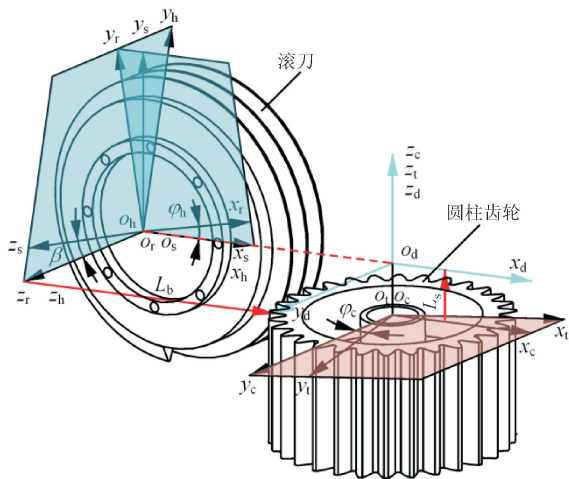


图9 滚刀加工坐标系

Fig. 9 Coordinate system for hob machining

图9中,坐标系 $o_h x_h y_h z_h$ 、 $o_c x_c y_c z_c$ 分别与滚刀

和工件固联,坐标系 $o_r x_r y_r z_r$ 、 $o_t x_t y_t z_t$ 分别是滚刀和工件的运动坐标系,坐标系 $o_s x_s y_s z_s$ 为实际安装时滚刀倾斜后的坐标系,坐标系 $o_d x_d y_d z_d$ 为辅助坐标系, L_s 为滚刀的轴向进给距离, β 是滚刀刀架的安装角, L_b 为滚刀与工件的分度圆半径之和, φ_c 为工件的旋转角度, φ_h 为滚刀的旋转角度,此时,滚刀与工件的转角完全满足传动比关系,与式(3)相同。根据图9可以建立滚刀坐标系 S_h 到圆柱齿轮齿面坐标系 S_c 的坐标变换矩阵 $\mathbf{M}_{ch}$,再结合滚刀转角 φ_h 和进给运动参数 L_s 的啮合方程,可以得到圆柱齿轮齿面的位矢 $\mathbf{R}_c$ 和法矢 $\mathbf{n}_c$

$$\begin{cases} \mathbf{R}_c(\varphi_h, L_s, \theta_h, u_h) = \mathbf{M}_{ch}(\varphi_h, L_s) \mathbf{R}_h(\theta_h, u_h) \\ \mathbf{n}_c(\varphi_h, L_s, \theta_h, u_h) = \mathbf{M}_{ch}(\varphi_h, L_s) \mathbf{n}_h(\theta_h, u_h) \\ f_2(\varphi_h, L_s, \theta_h, u_h) = \mathbf{n}_c \cdot \frac{\partial \mathbf{R}_c}{\partial \varphi_h} \\ f_3(\varphi_h, L_s, \theta_h, u_h) = \mathbf{n}_c \cdot \frac{\partial \mathbf{R}_c}{\partial L_s} \end{cases} \quad (8)$$

3.2 滚刀加工共轭齿面的附加运动

由于共轭齿面的端面已不再是标准渐开线,因此为了加工出共轭齿面,在滚刀加工圆柱齿轮运动的基础上增加滚刀的径向位移 ΔL 和工件的附加转角 $\Delta\varphi$,如图10所示,使滚刀的切削刃与共轭齿面的每一点相切。由于工件增加附加转动 $\Delta\varphi$,滚刀与工件的转动不再满足传动比,导致标准滚刀加工会产生过切现象,因此滚刀采用切向变位避免过切。

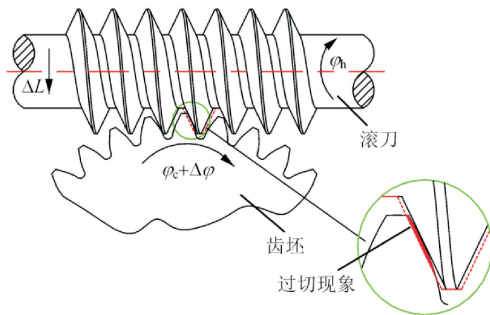


图10 共轭齿面加工运动

Fig. 10 Machining motions of conjugate tooth surface

为了获得附加运动规律,将 $\Delta\varphi$ 和 ΔL 用 $\varphi_h=0$ 处的泰勒多项式表示

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \sum_{n=0}^6 a_n \varphi_h^n \\ \Delta L = \sum_{n=0}^6 b_n \varphi_h^n \end{cases} \quad (9)$$

式中: a_n 、 b_n 分别为工件附加转角和滚刀径向移动的运动多项式中的第 n ($n=0, 1, 2, \dots, 6$)阶系数。故小齿轮的数控加工齿面的位矢 $\mathbf{R}_c^*$ 、法矢 $\mathbf{n}_c^*$ 分别为

$$\begin{cases} \mathbf{R}_i^c(\varphi_h, L_s, \theta_h, u_h) = \mathbf{M}_{1h}(\varphi_h, L_s) \mathbf{R}_h(\theta_h, u_h) \\ \mathbf{n}_i^c(\varphi_h, L_s, \theta_h, u_h) = \mathbf{M}_{1h}(\varphi_h, L_s) \mathbf{n}_h(\theta_h, u_h) \end{cases} \quad (10)$$

3.3 数控加工共轭齿面的数值方法

为了数控加工的共轭齿面逼近理论共轭齿面,需要调整数控轴的运动,可采用敏感矩阵法对附加运动系数增量进行求解,具体过程如下。

将共轭小齿轮齿面在齿高和齿宽方向表示成 5×7 的网格齿面,共计 35 个网格点,计算出各点的理论偏差,将偏差写成列向量 $\delta_i^c = \delta_i (i = 1, 2, \dots, q)$ 。将滚刀和工件的附加运动多项式系数 a_n 和 $b_n (n = 0, 1, 2, \dots, 6)$ 合并成列向量 $\mathbf{c} = \mathbf{c}_j (j = 0, 1, 2, \dots, p, p = 7 \times 2 = 14)$, 设 $\Delta \mathbf{c}$ 为引起齿面位置矢量变化的增量,因此敏感矩阵方程可表示为

$$\delta_{1,q \times 1}^c = \mathbf{J}_{q \times p} \Delta \mathbf{c}_{p \times 1} \quad (11)$$

式中: $\mathbf{J}$ 为敏感矩阵,表示目标修形量在增量变化时的响应程度,可用下式表示

$$\mathbf{J} = \mathbf{n}_c [\mathbf{R}_i^c(\mathbf{c}_j + \Delta \mathbf{c}_j) - \mathbf{R}_c] / \Delta \mathbf{c}_j \quad (12)$$

其中 $\Delta \mathbf{c}_j$ 为系数 $\mathbf{c}_j$ 的单位增量,由于偏差都是微小量,导致式(11)通常是病态的。采用奇异值分解法迭代求解方程,其中敏感矩阵的奇异值分解式为

$$\mathbf{J} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Omega} \mathbf{\Lambda}^T \quad (13)$$

式中: $\mathbf{\Gamma}$ 和 $\mathbf{\Lambda}$ 分别是 $q \times q$ 阶和 $p \times p$ 阶的正交矩阵; $\mathbf{\Omega} = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_q)$ 是对角元素,其对角元素是 $\mathbf{J}$ 的奇异值,按降序排列。

方程经过 λ 次迭代求解,满足

$$\begin{cases} \mathbf{H} = \delta_i^c - \mathbf{n}_c [\mathbf{R}_i^c(\mathbf{c}_j + \Delta \mathbf{c}_j) - \mathbf{R}_c] \\ \sqrt{\mathbf{H}^T \mathbf{H}} \leq 10^{-3} \end{cases} \quad (14)$$

后停止计算。

附加运动的多项式系数可由下式确定

$$\mathbf{c}^{\lambda+1} = \mathbf{c}^\lambda + \Delta \mathbf{c}^\lambda = \mathbf{c}_{p \times 1}^\lambda + \sum_{\epsilon=1}^{\mu} \frac{1}{\delta_\epsilon^\lambda} \mathbf{v}_{\epsilon, p \times 1}^\lambda \mathbf{v}_{\epsilon, 1 \times q}^\lambda \delta_{1, q \times 1}^c \quad (15)$$

式中: $\mathbf{v}_\epsilon^\lambda$ 、 $\mathbf{v}_\epsilon^\lambda$ 分别为矩阵 $\mathbf{\Lambda}^\lambda$ 和 $\mathbf{\Gamma}^\lambda$ 的第 ϵ 列向量; δ_ϵ^λ 为对角阵 $\mathbf{\Omega}^\lambda$ 中对角线上由大到小排列的第 ϵ 个元素,也是 $\mathbf{J}^\lambda$ 的第 ϵ 个奇异值; μ 为不大于设定阈值最大奇异值 δ_ϵ^λ 的序数。

4 直纹面齿轮副应力分析

根据上述章节的研究内容,可获得一对共轭的直纹面齿轮副。为了探究其是否能替代传统面齿轮副传动,需对其承载接触特性进行研究,本文采用有限元软件对面齿轮副进行静力学分析^[22]。本文设计了一组传统面齿轮-圆柱齿轮副,与直纹面面齿轮

副进行对比,两组齿轮副的基本参数相同,见表 1。

表 1 面齿轮的基本参数

Table 1 Basic parameters of face gear

基本参数	数值
面齿轮齿数 N_2	90
圆柱齿轮齿数 N_1	30
压力角 $\alpha / (^\circ)$	25
模数 m / mm	3
轴夹角 $\gamma / (^\circ)$	90
面齿轮内径 L_1 / mm	130
面齿轮外径 L_2 / mm	150

4.1 有限元模型建立

由于整体的面齿轮副有限元模型计算规模大、效率低且收敛困难,为了方便得到直纹面面齿轮副的啮合特性,建立了局部的五齿啮合有限元模型,如图 11 所示。

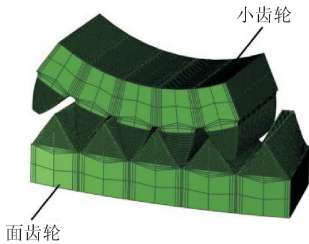


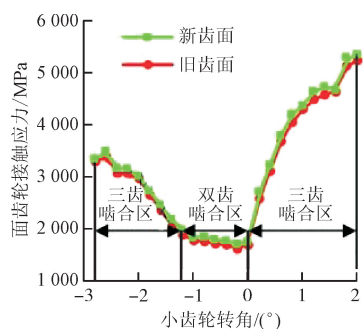
图 11 面齿轮副有限元模型

Fig. 11 Finite element model of face gear drives

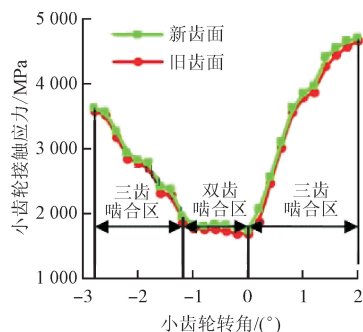
传统面齿轮-圆柱齿轮副的齿面方程由文献[20]给出,直纹面面齿轮及其共轭小齿轮的齿面方程由式(1)和式(4)给出,通过 MATLAB 软件数学建模后再导入 ABAQUS。模型的网格密度为 $81 \times 51 \times 7$ (齿宽 $\times$ 齿高 $\times$ 齿厚)。采用的材料属性为:密度 $7\,800 \text{ kg/m}^3$,弹性模量 206.8 GPa ,泊松比 0.29 ,限制除小齿轮绕轴线旋转的所有自由度,并对小齿轮施加 $1\,600 \text{ N} \cdot \text{m}$ 的扭矩。以上操作均通过 MATLAB 开发的程序实现参数化,并对两组齿轮副进行同样的设定,生成相应的 INP 文件后,导入有限元软件 ABAQUS 中进行计算,将计算结果 (ODB 文件) 导入有限元软件中进行后处理,提取轮齿承载相关特性参数。

4.2 有限元结果分析

暂不考虑两组完全共轭的齿轮副线接触引起的边缘接触及其导致的应力集中问题,只对比直纹面面齿轮副(新齿轮副)与传统面齿轮副(旧齿轮副)的承载性能的差别。图 12 展示了两组齿轮副在相同载荷下几乎相同的齿面接触应力,新旧面齿轮在同一接触位置上的最大接触应力差只是传统面齿轮的 0.67% ,新旧小齿轮在同一接触位置上的最大接触应力差是圆柱齿轮的 1.47% 。



(a) 面齿轮接触应力

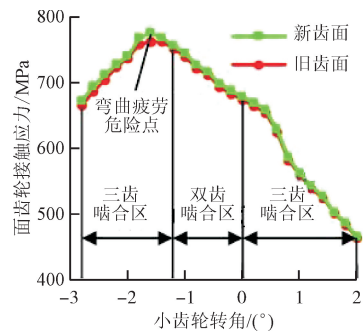


(b) 小齿轮接触应力

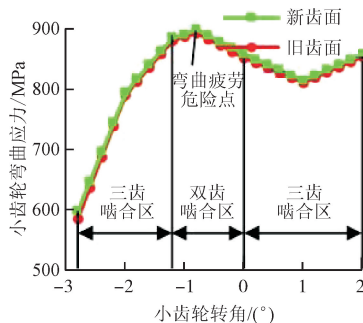
图 12 齿轮副接触应力

Fig. 12 Contact stresses of face gear pairs

图 13 展示了两组齿轮副在相同载荷下基本相同的弯曲应力。可以看出,新旧面齿轮在同一接触位置上的最大弯曲应力差是传统面齿轮的 1.29%, 新旧小齿轮在同一接触位置上的最大接触应力差是圆柱齿轮的 1.06%。



(a) 面齿轮弯曲应力

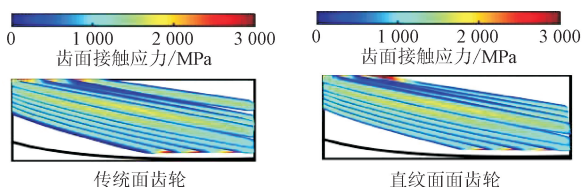


(b) 小齿轮弯曲应力

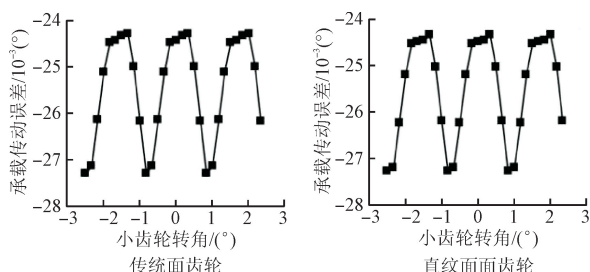
图 13 齿轮副弯曲应力

Fig. 13 Bending stresses of face gear pairs

图 14 为齿面轮的承载接触印痕与承载传动误差。由图 14 可知,传统面齿轮和直纹面面齿轮的接触印痕和承载传动误差几乎一致,且承载传动误差的最大差值小于 0.0003° 。



(a) 承载接触印痕



(b) 承载传动误差

图 14 面齿轮的承载接触印痕与承载传动误差

Fig. 14 Bearing contact and bearing transmission error of face gears

综上,在小传动比的条件下,直纹面面齿轮副完全可以取代传统面齿轮副进行传动,并发挥直纹面面齿轮的加工优势,提高加工效率,降低制造成本。至于其边缘接触的问题,文献[23]通过小齿轮和插齿刀间齿数差的方式将接触印痕限制在局部,可解决边缘接触的问题;文献[24]通过对传统齿面进行主动修形,可改善齿轮的啮合特性。因此,通过对小齿轮的齿面进行主动设计,既能得到啮合性能良好的齿面,又能保持直纹面加工的优越性,该研究内容不是本文的研究重点,故不再深入讨论。

5 算例分析

为了验证上述共轭小齿轮加工方法的正确性,本文进行了相关的数值算例以及仿真加工,齿轮副的基本参数如表 1 所示。

5.1 加工方法的数值算例

为了确保加工过程中滚刀在附加运动的影响下不会产生过切现象,首先给出了滚刀切削刃与共轭齿廓以及渐开线齿廓的位置关系。图 15 展示了在加工共轭齿面偏差最大点时,滚刀切削刃相对共轭齿廓的位置以及共轭齿廓相对渐开线齿廓的位置。从图中可看出,滚刀的切削刃在共轭齿廓的每一点都接近于相切,没有产生过切现象,表明加工运动的

可行性。

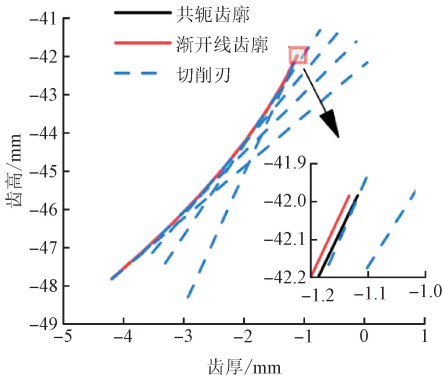


图 15 切削刃逼近共轭齿廓

Fig. 15 Cutting edges approaching the conjugate profile

图 16 展示了圆柱齿轮与共轭小齿轮的齿面偏差以及数控加工效果。圆柱齿轮齿面与共轭齿面的最大齿面偏差为 $14.02\text{ }\mu\text{m}$,如图 16(a)所示,齿面偏差的变化规律与 1.3 小节中的分析基本相同;通过附加运动的作用,得到数控加工齿面与共轭理论齿面最大只有 $0.65\text{ }\mu\text{m}$ 的误差,如图 16(b)所示,运动轴多项式系数见表 2。由表可知,即使共轭齿面的偏差在较宽的范围内变化,数控加工齿面也能很好地逼近共轭齿面,可以将理论误差控制在 $1\text{ }\mu\text{m}$ 以内,说明滚齿加工共轭齿面方法的正确性,并且使用奇异值分解法求解敏感矩阵方程以获得数控多项式系数的增量是稳定的。

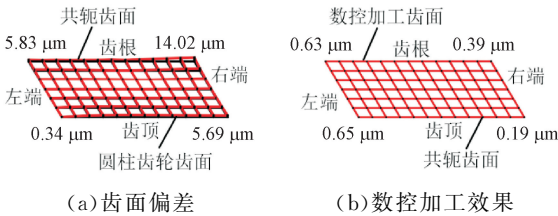


图 16 齿面偏差及数控加工效果

Fig. 16 Tooth surface deviation and computer numerical control machining result of tooth surface

表 2 附加运动轴多项式系数

Table 2 Polynomial coefficients of additional motion axes		
阶数	$a_n/10^{-3}$	$b_n/10^{-3}$
0	0.097 5	0.106 6
1	0.089 9	0.826 7
2	0.051 8	4.461 9
3	0.109 1	-1.073 6
4	0.094 2	0.360 6
5	0.097 6	0.034 2
6	0.096 8	0.109 8

5.2 加工方法的仿真算例

为了验证文中所提出的共轭小齿轮加工方法的正确性,利用仿真软件 VERICUT 建立滚齿加工共轭小齿轮的机床模型^[25],如图 17 所示。图中,移动轴 X 负责滚刀的径向运动,移动轴 Y 负责滚刀的进给运动,旋转轴 B 负责小齿轮的综合转动(分齿运动与附加转动之和),旋转轴 C 负责滚刀的转动。

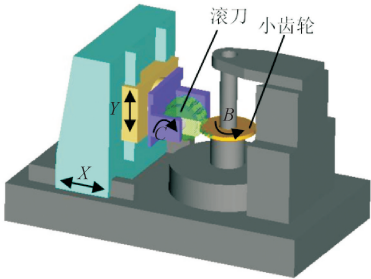


图 17 数控机床模型

Fig. 17 Computer numerical control machine tool model

根据上文提出的共轭齿面加工方法,以修正最大齿面偏差的原则选取相关参数,小齿轮参数如表 1 所示。滚刀参数为: $N_h = 1, m_h = 3\text{ mm}, \alpha_h = 25^\circ, r = 33.75\text{ mm}, x_h = 0.064$ 。编写对应的 G 代码数控程序进行仿真加工,由于附加转角的存在,滚刀单侧切削刃作用,加工出单侧齿面后,将滚刀另一侧切削刃定位至切向变位前,同时改变滚刀与工件的转向可加工出对称齿面,结果如图 18(a)所示。

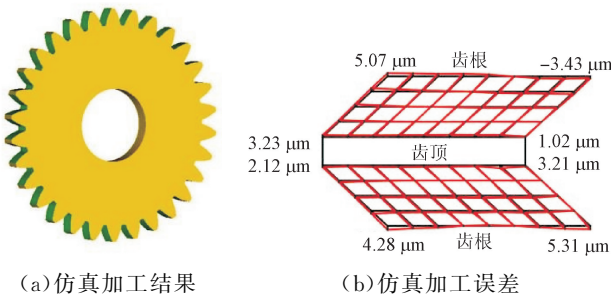


图 18 仿真加工结果及误差

Fig. 18 Simulated machining results and errors

将加工模型以 STL 格式导入 MATLAB 中,使小齿轮仿真结果离散为 5×9 的网格点,提取 STL 模型对应位置的坐标值并与理论计算值进行对比,获得仿真加工误差如图 18(b)所示。通过仿真加工结果可知,仿真加工误差与理论共轭齿面的最大误差为 $5.31\text{ }\mu\text{m}$,能够满足齿轮的 5 级精度,考虑到模型误差及取值误差,说明了该方法的有效性。

6 结 论

(1)在前述研究的基础上,通过直纹面面齿轮共轲出小齿轮,将其齿面与圆柱齿轮齿面对比,其偏差主要分布在齿根处,且齿面偏差会随着传动比的增大而减小。

(2)建立相应的滚刀模型并提出了共轲小齿轮齿面的加工方法,该方法通过调整滚刀的附加移动和小齿轮的附加转动能较好地逼近共轲齿面。

(3)齿面轴承接触分析算法验证了直纹面面齿轮副在小传动比条件下代替传统面齿轮副的可行性,进一步扩展了直纹面的应用范围。

参考文献:

- [1] YANG Yuncheng, WU Yuren, TSAI T M. An analytical method to control and predict grinding textures on modified gear tooth flanks in CNC generating gear grinding [J]. Mechanism and Machine Theory, 2022, 177: 105023.
- [2] WANG Yanzhong, SU Guoying, CHU Xiaomeng, et al. A finishing method for the continuous generation of spur face gears with shaving cutters [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2021, 190: 106020.
- [3] HERMANN J S. CONIFACE face gear cutting and grinding [J]. Gear Solutions, 2010, 18(9): 39-47.
- [4] FISHER D J, RUSSELL A, FOLPRECHT G, et al. Apparatus for manufacturing a face gear: US 2008/0268750 A1 [P]. 2008-10-30.
- [5] LITVIN F L, FUENTES A, ZANZI C, et al. Face-gear drive with spur involute pinion: geometry, generation by a worm, stress analysis [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2002, 191(25/26): 2785-2813.
- [6] WANG Yanzhong, HOU Liangwei, LAN Zhou, et al. A precision generating hobbing method for face-gear based on worm hob [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers: Part C Journal of Mechanical Engineering Science, 2017, 231(6): 1057-1071.
- [7] 王延忠, 唐文, 殷永耀, 等. 基于球形滚刀的面齿轮滚齿加工方法 [J]. 北京航空航天大学学报, 2017, 43(3): 441-448.
WANG Yanzhong, TANG Wen, YIN Yongyao, et al. Hobbing method of face gear based on spherical hob [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2017, 43(3): 441-448.
- [8] PENG Xianlong. A new geometry definition and generation method for a face gear meshed with a spur pinion [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers: Part B Journal of Engineering Manufacture, 2022, 236(8): 1037-1051.
- [9] 彭先龙, 侯艳艳, 张乐, 等. 可展直纹面面齿轮的加工原理与方法 [J]. 西北工业大学学报, 2020, 38(6): 1299-1307.
PENG Xianlong, HOU Yanyan, ZHANG Le, et al. Principle and method for machining face gear with developable ruled surface [J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2020, 38(6): 1299-1307.
- [10] CHU Xiaomeng, ZENG Hong, WANG Yanzhong, et al. Research on tooth surface design and side milling machining method of ruled line face gear [J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2023, 124(1): 511-526.
- [11] 彭先龙, 侯艳艳, 李爱民, 等. 可展直纹面面齿轮传动的承载接触分析 [J]. 西安交通大学学报, 2023, 57(3): 86-96.
PENG Xianlong, HOU Yanyan, LI Aimin, et al. Analysis of bearing contact of developable ruled surface face gear transmission [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2023, 57(3): 86-96.
- [12] 王志, 石照耀. 面齿轮传动的特点及研究进展 [J]. 工具技术, 2009, 43(10): 10-14.
WANG Zhi, SHI Zhaoyao. Configuration characteristics of face gear drive and its research developments [J]. Tool Engineering, 2009, 43(10): 10-14.
- [13] 宋碧芸, 唐进元, 容铠彬, 等. 减小螺旋锥齿轮齿面加工误差的参数修正方法 [J]. 西安交通大学学报, 2022, 56(2): 101-109.
SONG Biyun, TANG Jinyuan, RONG Kaibin, et al. A machine-settings compensation method for reducing machining error of spiral bevel gear tooth flank [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2022, 56(2): 101-109.
- [14] WU Shunxing, YAN Hongzhi, WANG Zhiyong, et al. Tooth surface error correction of hypoid gears machined by duplex helical method [J]. Journal of Central South University, 2021, 28(5): 1402-1411.
- [15] JIANG Jinke, FANG Zongde. High-order tooth flank correction for a helical gear on a six-axis CNC hob machine [J]. Mechanism and Machine Theory, 2015, 91: 227-237.
- [16] SHIH Y P, SUN Ziheng, LAI K L. A flank correction face-milling method for bevel gears using a five-axis CNC machine [J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2017, 91(9): 3635-3652.

- [17] 蒋进科, 方宗德. 基于切向滚齿加工斜齿轮修形齿面的设计与分析 [J]. 中南大学学报(自然科学版), 2016, 47(11): 3677-3684.
JIANG Jinke, FANG Zongde. Design and analysis for topologically modified helical gear finished by gear-hobbing [J]. Journal of Central South University(Science and Technology), 2016, 47(11): 3677-3684.
- [18] 曹雪梅, 邓效忠, 聂少武. 基于共轭齿面修正的航空弧齿锥齿轮高阶传动误差齿面拓扑结构设计 [J]. 航空动力学报, 2015, 30(1): 195-200.
CAO Xuemei, DENG Xiaozhong, NIE Shaowu. Ease-off flank topography design for aviation spiral bevel gears with higher-order transmission errors by modification of conjugate flank [J]. Journal of Aerospace Power, 2015, 30(1): 195-200.
- [19] 聂少武, 邓静, 邓效忠, 等. 基于齿面 Ease off 拓扑的弧齿锥齿轮齿面偏差等效修正方法 [J]. 中国机械工程, 2017, 28(20): 2434-2440.
NIE Shaowu, DENG Jing, DENG Xiaozhong, et al. Tooth surface error equivalent correction method of spiral bevel gears based on ease off topology [J]. China Mechanical Engineering, 2017, 28(20): 2434-2440.
- [20] 吴亚男. 面齿轮滚齿加工方法的研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2013.
- [21] 常江, 刘惠芬. 切向变位齿轮的滚切加工 [J]. 沈阳工业大学学报, 2002, 24(3): 183-184.
CHANG Jiang, LIU Huifen. Rolling-turning machining of tangential profile shifted gears [J]. Journal of Shenyang University of Technology, 2002, 24(3): 183-184.
- [22] 唐进元, 刘艳平. 直齿面齿轮加载啮合有限元仿真分析 [J]. 机械工程学报, 2012, 48(5): 124-131.
TANG Jinyuan, LIU Yanping. Loaded meshing simulation of face-gear drive with spur involute pinion based on finite element analysis [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2012, 48(5): 124-131.
- [23] LITVIN F L, FUENTES A, ZANZI C, et al. Design, generation, and stress analysis of two versions of geometry of face-gear drives [J]. Mechanism and Machine Theory, 2002, 37(10): 1179-1211.
- [24] SIMON V V. Influence of tooth modifications on tooth contact in face-hobbed spiral bevel gears [J]. Mechanism and Machine Theory, 2011, 46(12): 1980-1998.
- [25] 杨胜群, 唐秀梅, 李克安, 等. VERICUT 数控加工仿真技术 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2010.
- (编辑 亢列梅 武红江)